

LÝ-THUYẾT VỀ CÁCH GIẢI $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$.

PHẠM HUY DUC

Hồi học ở Trung-học, chúng ta đều biết cách giải trực-tiếp căn-số bậc hai ($\sqrt{x}$) nhưng ta đều không biết chứng minh là tại sao phải làm như vậy. Nay tôi viết bài này để trình bày cách chứng-minh phương pháp giải trực-tiếp phương-trình bậc hai và cả phương-trình bậc ba. Dù là ta biết với một máy calculator nhỏ nhỏ, ta có thể lấy bất cứ căn-số bậc nào của một con số nào đó, nhưng giả sử ta không có máy tính thì sao, thêm vào khi lấy căn-số của một con số thật lớn, gồm có trên 8 con số mã, thì máy tính chỉ cho ta con số gần đúng thôi. Đối với các ai-huân lớn tuổi đều có con cái đang học đại-học, trong các môn Algebra hay Calculus, khi đọc bài này, có thể đem ra đó các bạn bè cùng lớp và cả ông thầy đang dạy mình nữa về cách lấy trực tiếp căn-số bậc hai, ba (không cần dùng máy tính). Khi biết cách lấy căn-số bậc 2 và 3, từ đó ta có thể lấy được căn-số bậc 4, 6, 8, 9 của bất cứ con số nào đó.

CHỨNG MINH VỀ CÁCH GIẢI CĂN-SỐ BẬC HAI.

Thí-dụ ta có con số 46; số 4 là hàng chục, số 6 là hàng đơn-vị. Ta có thể viết $46 = 40 + 6$. Nói một cách tổng-quát hơn, nếu ta có con số gồm hai con số mã AB, ta có thể viết là: $AB = A + B$; với A là hàng chục và B là hàng đơn-vị. Do đó con số hàng chục A bình-phương sẽ trở thành hàng trăm, con số hàng chục A nhân với con số hàng đơn-vị B, sẽ trở thành hàng chục, còn con số hàng đơn-vị B dù bình-phương hay lũy-thừa bậc mấy cũng là hàng đơn-vị.

Nếu ta có con số có 2 số mã AB bình-phương ta có thể viết là:

$$(A+B)^2 = \underbrace{(A^2)}_{\text{hàng trăm}} + \underbrace{(2A \times B)}_{\text{hàng chục}} + \underbrace{(B^2)}_{\text{hàng đơn-vị}} \quad (1)$$

Vậy khi ta lấy căn-số của một con số, ta phải tìm con số hàng chục A và con số hàng đơn-vị B.

Thí-dụ: Lấy căn-số của số 1156.

$$\begin{array}{r|l} 1156 & 34 \\ \hline 09 & 64 \times 4 \\ \hline 0256 & \\ \hline 256 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

Như theo pháp giải ta học ở trung-học, ta chia con số mã mình muốn lấy căn-số ra làm từng nhóm, mỗi nhóm 2 con số mã. Như theo phương-trình (1), muốn tìm con số hàng chục A, thì ta lấy căn-số của số hàng trăm (A), như thí dụ bằng số lấy căn-số của số 11, ta được con số 3. Khi biết con số hàng chục A, ta nhân số A cho 2, rồi ước tính con số hàng đơn-vị B nào đó để nhân số (2A) để thành con số mình phải kiểm. Theo thí-dụ bằng số, con số 64×4 tức là $(2A + B)$ hay $(2A \times B) + (B^2)$.

Ta chứng minh tương tự như trên với một con số có nhiều con số mã, ta dùng phương pháp giải như trên, vì phương-pháp giải căn-số bậc hai ai cũng biết nên tôi không nêu ra đây, và bài này ta nhấn mạnh về cách giải căn-số bậc ba.

CÁCH GIẢI CĂN-SỐ BẬC BA.

Ta có con số gồm có 2 con số mã AB, với A là hàng chục, B là hàng đơn-vị, con số AB tam-thừa ta có thể viết:

$$(A+B)^3 = \underbrace{(A^3)}_{\text{hàng ngàn}} + \underbrace{(3A^2 \times B)}_{\text{hàng trăm}} + \underbrace{(3A \times B^2)}_{\text{hàng chục}} + \underbrace{(B^3)}_{\text{hàng đơn-vị}} \quad (2)$$

Thí-dụ bằng số:

$$\begin{aligned} (43)^3 &= (40 + 3)^3 = (40)^3 + 3(40)^2(3) + 3(40)(3)^2 + (3)^3 \\ 79507 &= 64000 + 14400 + 1080 + 27 = 79507 \end{aligned}$$

Theo phương-trình (2), muốn lấy căn-số bậc ba, ta chia con số đó ra từng nhóm từ phải qua trái, mỗi nhóm ba con số mã. Muốn tìm con số A, ta lấy căn-số bậc ba của nhóm sau cùng, dĩ nhiên ta phải nhớ số tam-thừa từ 1 đến 9 ($1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$). Khi biết được con số A, ta bình-phương con số A ấy lên rồi nhân cho 3. Ta ước tính con số B bằng cách lấy con số phải tính bỏ bớt 2 con số sau rồi chia cho $3A^2$. Khi ước tính được con số B, ta lấy con số B này nhân cho A rồi nhân cho 3, được con số này ta ghi vào

sau con số 3A. Sau đó ta bình-phương con số B rồi để vào sau con số (3A x B). Tất cả con số trên ta nhân cho con số mã B. Nói thì dài dòng, nhưng khi làm quen rồi thì rất mau.

Thí-dụ 1 : Lấy căn-số bậc ba của số 9261.

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 21 \\ 8 & 1261 \times 1 \\ \hline 1261 & \\ 1261 & \\ \hline 0000 & \end{array}$$

Đầu tiên ta kiểm được con số A = 2, bằng cách lấy căn-số bậc ba của 9 ($2^3 = 8$). Ta hạ cái nhóm 261 xuống thành số 1261, ta ước tính con số B bằng cách lấy con số 1261 này bỏ 2 con số sau, thì còn là 12, con số 12 này chia cho $3A^2 = 3(2)^2 = 12$, ta được con số B = 1. Sau khi ước tính con số B = 1, thì con số 1261 bên tay phải ta kiểm được bằng cách : con số 12 là $3A^2 = 3 \times 2^2$; con số 6 là $(3A \times B) = 3(2)(1)$; con số 1 là $B^2 = (1)^2$; tất cả con số 1261 này ta nhân cho B = 1 rồi để vào phía tay trái; ~~con số~~ con số này phải bằng hay nhỏ hơn con số phải tìm. Vậy ta kiểm được con số B = 1; $\sqrt[3]{9261} = 21$.

Thí-du 2 : Lấy căn-số bậc ba của 148877.

$$\begin{array}{r|l} 148.877 & 53 \\ 125 & 7959 \times 3 \\ \hline 023.877 & \\ 23.877 & \\ \hline 00.000 & \end{array}$$

Đầu tiên ta kiểm được con số A = 5, vì $5^3 = 125$ nhỏ 148, 148 trừ cho 125 còn lại 23, ta hạ 877 xuống thành 23 877. Ta ước tính con số B bằng cách lấy số 238 chia cho $3A^2 = 3(5)^2 = 75$, ta được con số B = 3. Sau khi ước tính được con số B = 3, thì con số 7959 ta kiểm được bằng cách : số 79 là $3A^2 = 3(5)^2 = 75$, nhưng sau đó ta nhớ số 4 của hàng $(3A \times B) = 3(5)(3) = 45$ nên ta sửa là 79. Số 5 là con số sau của $(3A \times B) = 45$. Số 9 sau cùng là $B^2 = (3)^2 = 9$. Tất cả con số 7959 này ta nhân cho B = 3, ta được đúng số 23877. Vậy căn-số bậc ba của 148877 là 53.

Phương-pháp chứng minh trên cũng đúng cho trường hợp một con số có nhiều số mã, hoặc lấy căn-số của con số thập-phân (số lẻ).

Thí-du 3 : Lấy căn-số bậc ba của 14437662875.

$$\begin{array}{r|l} 14.437.662.875 & 2435 \\ 8 & 1456 \times 4 \\ \hline 06.437 & 174969 \times 3 \\ 5.824 & \hline 0.613.662 & 17751175 \times 5 \\ 524.907 & \\ \hline 088.755.875 & \\ 88.755.875 & \\ \hline 00.000.000 & \end{array}$$

Đầu tiên ta kiểm được con số A = 2, vì $2^3 = 8$ nhỏ hơn 14. Ta kiểm được con số B = 4, thì con số 1456 ta có được bằng cách : số 14 là $3A^2 = 3(2)^2 = 12$, nhưng sau đó ta nhớ số 2 của hàng $(3A \times B) = 3(2)(4) = 24$ nên ta sửa là 14. Số 5 kế bên là con số sau của $3(2)(4) = 24$ là số 4, nhưng sau đó ta nhớ con số 1 của hàng $(B)^2 = (4)^2 = 16$ nên ta sửa là 5, con số 6 là số sau của $(B)^2 = (4)^2 = 16$. Tất cả con số 1456 này ta nhân cho B = 4 thành 5824 nhỏ hơn 6437. (Nếu ta chưa quen, ta ước tính B = 5, sau khi nhân với nhau sẽ thành con số lớn hơn 6437, nên ta phải ước tính lại B = 4). Ta được con số B = 4, ta cho lên trên góc tay phải thành số 24. Bây giờ ta ước tính con số C bằng cách lấy số 613662 bỏ 2 số sau chia cho $3(24)^2 = 1728$, ta được con số C = 3; thì con số 174969 ta có được bằng cách : số 1749 là số của $3(24)^2 = 1728$, nhưng sau đó nhớ số 21 của hàng $3(24)(3) = 216$, nên ta sửa là 1749, số 6 kế bên là con số sau của 216, số 9 sau cùng là $(C)^2 = 3^2 = 9$. Tất cả số 174969 này ta nhân cho C = 3 thành số 524907. Ta được số C = 3, cho lên góc trên tay phải thành 243. Ta ước tính tương tự con số D bằng cách lấy số 887558 chia cho $3(243)^2 = 177147$ ta được số D = 5; thì con số 17751175 có được bằng cách : số 177511 là số của $3(243)^2 = 177147$, nhưng sau

đó nhớ số 364 của hàng $3(243)(5) = 3645$, nên ta sửa là 177511. Số 7 kế bên là số 5 sau cùng của số 3645 nhưng sau đó ta nhớ số 2 của hàng $D^2 = 5^2 = 25$ nên thành số 7. Con số 5 sau cùng là số 5 của hàng $D^2 = 25$. Tất cả số 17751175 ta nhân cho D = 5 vừa chẵn số 88755875, ta được số D = 5. Vậy căn-số bậc ba của số 14 437 662 875 là 2435.

Thí-du 4 : Lấy căn-số bậc ba của 65548,67329.